Commande linéaire des systèmes multidimensionels: TD1

Antoine Drouin

Jeudi 17 Octobre 2019

— Durée : 2h

— Ce sujet comporte 2 pages

1 Exercice : Placement de pôles (30 minutes)

Soit le système dynamique LTI de représentation d'état :

$$\underline{\dot{X}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} .\underline{X} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .\underline{U} \tag{1}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} .\underline{X} \tag{2}$$

où α est un réel positif

1. Discutez la stabilité du système naturel et sa commandabilité.
2. Synthétisez la commande par retour d'état ramenant la dynamique du système en boucle fermée à un second ordre de pulsation naturelle ω et d'amortissement ξ

Soit le système dynamique LTI de représentation d'état :

$$\underline{\dot{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{pmatrix} .\underline{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .\underline{U} \tag{3}$$

$$\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} .\underline{X} \tag{4}$$

où α est un réel positif

3. Synthétisez la commande par retour d'état ramenant la dynamique du système en boucle fermée à un second ordre de pulsation naturelle ω et d'amortissement ξ

2 Exercice : Commande Linéaire Inverse (30 minutes)

Nous allons ici effectuer à titre d'exercice l'inversion de la dynamique latérale d'un avion dont les simulations ont été présentées en cours. Rappelons la dynamique latérale simplifiée et linéarisée de l'avion

$$\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{p} \\ \dot{r} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.15 & 0.01 & -0.993 & 0.041 \\ -7.78 & -1.61 & 0.48 & 0 \\ 2.62 & -0.02 & -0.37 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ p \\ r \\ \phi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0.03 \\ -0.92 & 1.05 \\ -0.057 & -1.7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_a \\ \delta_r \end{pmatrix}$$

Le but de l'exercice est de synthétiser une loi de commande telle que les deux composantes de la sortie ϕ et β suivent des dynamiques linéaires stables et découplées autour des valeurs de consigne ϕ_c et β_c.

1. Vérifiez la commandabilité du système.
2. Calculez le degré relatif de chacune des composantes de la sortie. Commentez sur la présence d'une dynamique interne.
3. Proposez une dynamique de référence pour chacune des composantes de la sortie.
4. Réalisez l'inversion et donnez l'expression du retour d'état et de la pré-commande correspondants.

3 Exercice (>1h)

Considérons le pendule inversé décrit sur la figure 1

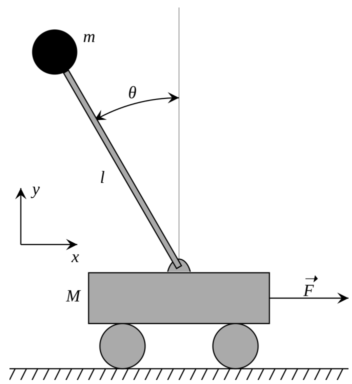

FIGURE 1 – Pendule inversé.

La mise en équations détaillée est présentée dans la référence suivante : `http://en.wikipedia.org/wiki/Inverted_pendulum`

En utilisant les équations de Lagrange, il vient :

$$(M+m)\ddot{x} - m.l.\ddot{\theta}.\cos\theta + m.l.\dot{\theta}^2.\sin\theta = F \tag{5}$$

$$l.\ddot{\theta} - g.\sin\theta = \ddot{x}.\cos\theta \tag{6}$$

qui peut être réarrangé en :

$$\ddot{x} = \frac{F - m.l.\dot{\theta}^2.\sin\theta + m.g.\sin\theta.\cos\theta}{M + m.(\sin\theta)^2} \tag{7}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{F.\cos\theta - m.l.\dot{\theta}^2.\sin\theta.\cos\theta + (m+M).g.\sin\theta}{l.\left(M + m.(\sin\theta)^2\right)} \tag{8}$$

1. Donnez une représentation d'état du système
2. Cherchez un point d'équilibre.
3. Simulez numériquement la réponse du pendule à une perturbation.
4. Réglez empiriquement un correcteur par retour d'état stabilisant le pendule. Simulez
5. Calculez la représentation d'état linéarisée autour du point d'équilibre.
6. Discutez la stabilité et la commandabilité de cette dernière.
7. Synthétisez un correcteur par retour d'état satisfaisant à l'objectif de commande suivant : temps de réponse de deux secondes et dépassement inférieur à 5 pour cent. Simulez sur une perturbation et un échelon de consigne.
8. Simulez une saturation d'actionneur à 50 pour cent de la valeur maximum atteinte par le correcteur précédemment synthétisé. Simulez.
9. Réalisez une étude de robustesse paramétrique par simulation.