IENAC-S-98 Octobre 1999

Examen de logique formelle

Durée : 1 h

Tous documents autorisés

1 Connaissances générales

1. On s'intéresse à des formules propositionnelles sur l'ensemble de variables $\{p, q, r\}$.

   (a) Donner une formule F non tautologique qui soit conséquence logique de $p \wedge q$:

   $$\begin{array}{rcl} & \not\models & F \\ p \wedge q & \models & F \end{array}$$

   (b) Donner une formule G non satisfiable qui soit conséquence logique de $p \vee q$.

2. On axiomatise le domaine des entiers naturels à l'aide de deux symboles fonctionnels: z d'arité 0 pour l'entier 0 et s d'arité 1 pour la fonction $x \mapsto x+1$ (i.e $\lambda x.(x+1)$). Il s'agit de l'axiomatisation de Peano.

   (a) Montrer que tout entier peut être représenté avec ces deux symboles. Montrer que la représentation est unique.

   (b) On veut axiomatiser l'addition. Pour cela, on choisit de représenter la fonction $x, y, z \mapsto (x+y=z)$ (i.e. $\lambda xyz.(x+y=z)$) où la fonction $=$ est la fonction de test d'égalité dans les entiers, par un symbole de prédicat p d'arité 3. Donner la formule sous forme clausale qui définit p. Indication : donner deux clauses correspondant aux deux cas pour y, nul ou non nul.

2 Démonstration en calcul des propositions

1. Montrer, avec la technique de démonstration de votre choix la non-conséquence logique suivante

   $$p \vee r,\ r \vee \neg q,\ \neg p \vee q \not\models \neg r$$

3 Démonstration en calcul des prédicats

1. Argumenter sur le fait que le calcul des prédicat n'est pas décidable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'algorithme permettant de savoir si oui ou non une formule du calcul des prédicats est une tautologie.

2. En utilisant la résolution ou le calcul des séquents, prouver la conséquence logique suivante :

   $$\exists x \forall y\ (p(x) \rightarrow p(y)) \wedge (p(y) \rightarrow p(x)) \models (\exists x\ p(x) \rightarrow \forall x\ p(x)) \wedge (\forall x\ p(x) \rightarrow \exists x\ p(x))$$