IENAC-S-97 Vendredi 9 octobre 1998

Examen de logique

Durée : 1h30

Tous documents autorisés

1. Connaissances générales :
   (a) Donner un exemple de formule du calcul des prédicats
      – qui ne fait pas partie du calcul des propositions ;
      – et qui est satisfiable sans être tautologique.
   (b) Montrer informellement que le calcul des propositions est complet, c-à-d que le problème de satisfiabilité d'une formule est soluble en temps fini.

2. On veut montrer que n'importe quelle formule du calcul des propositions possède une forme clausale avec des clauses à exactement trois éléments, c-à-d que pour toute formule F, il existe une formule F', équivalente à F, qui est une forme normale conjonctive dont les disjonctions possèdent 3 littéraux.

   On utilise pour cela la transformation suivante : soit $C = \{c_1, ..., c_m\}$ un ensemble de clauses quelconques sur les variables propositionnelles $U = \{u_1, ..., u_n\}$. A chaque clause $c_j = \{l_1, \ldots, l_k\}$ de C on associe un ensemble de clauses C'_j et un ensemble de nouvelles variables U'_j. La construction est différente suivant le nombre de littéraux de la clause initiale c_j :

   – si $k = 1$

$$\begin{aligned} U'_j &= \{u_j^1, u_j^2\} \\ C'_j &= \{\{l_1, u_j^1, u_j^2\}, \{l_1, \neg u_j^1, u_j^2\}, \{l_1, u_j^1, \neg u_j^2\}, \{l_1, \neg u_j^1, \neg u_j^2\}\} \end{aligned}$$

   – si $k = 2$

$$\begin{aligned} U'_j &= \{u_j^1\} \\ C'_j &= \{\{l_1, l_2, u_j^1\}, \{l_1, l_2, \neg u_j^1\}\} \end{aligned}$$

   – si $k = 3$, $U'_j = \emptyset$ et $C'_j = \{c_j\}$

   – si $k > 3$

$$\begin{aligned} U'_j &= \{u_j^1, ..., u_j^{k-3}\} \\ C'_j &= \{\{l_1, l_2, u_j^1\}, \{\neg u_j^1, l_3, u_j^2\}, ..., \{\neg u_j^{k-3}, l_{k-1}, l_k\}\} \end{aligned}$$

   On considère alors l'ensemble C', l'union des ensembles de clauses associées à chacune des clauses de C :

$$C' = \bigcup_{j=1}^{m} C'_j$$

   Ces clauses sont écrites avec les variables de U ainsi que celles des ensembles U'_1, ..., U'_m.

(a) Montrer que l'ensemble de clauses obtenues C' est équivalent à l'ensemble initial C.

(b) Transformer l'ensemble suivant :

$$\{\{p, q\}, \{\neg p, \neg q, r, s\}, \{\neg r\}\}$$

3. Soit la signature $\Sigma = \{s_1, a_0\}$ et l'ensemble de symbole de prédicat $P = \{p_3\}$. On veut montrer que $\exists x_1 \exists x_2 p(x_1, x_2, s(a))$ est conséquence de :

$$\forall y \; p(a, y, y) \tag{1}$$

$$\forall x \forall y \forall z \; p(x, y, z) \rightarrow p(s(x), y, s(z)) \tag{2}$$

(a) Donner deux preuves en utilisant la résolution. Ces deux preuves permettent d'exhiber des valeurs solution pour x_1 et x_2 (les valeurs avec lesquelles sont unifiées ces variables lors de la preuve).

(b) Donner deux preuves en utilisant le calcul des séquents. Ces deux preuves permettent d'exhiber des valeurs solution pour x_1 et x_2 (par unification des termes t introduits lors de l'utilisation de la règle $\exists_D$).

(c) En prenant comme domaine d'interprétation l'ensemble des entiers, interpréter les résultats des deux questions précédentes.