IENAC-S-96 Vendredi 10 octobre 1997

Examen de

logique et calculabilité

Durée : 2 h

Tous documents autorisés

1 Logique

1. Soit $\mathcal{F}^2$ l'ensemble des formules propositionnelles sur n atomes $\{p_1, ..., p_n\}$ s'écrivant comme une conjonction de clauses à 2 littéraux :

$$\bigwedge_{i=1}^{k}(l_i^1 \vee l_i^2)$$

avec $l_i^1 = p_j$ ou $l_i^1 = \neg p_j$ (idem pour l_i^2).

   (a) Estimer le nombre de clauses distinctes à 2 littéraux que l'on peut écrire avec n atomes.

   (b) Donner un algorithme pour prouver une formule de $\mathcal{F}^2$ dont le nombre d'étapes élémentaires (la *complexité temporelle*) est $p(n)$ où p est un polynôme et n le cardinal de l'ensemble des variables. Indication : utiliser le principe de résolution.

2. Avec la méthode de démonstration de votre choix (excepté le langage naturel !), montrer qu'un club privé écossais dont les règles sont les suivantes ne contient pas de membres :

   (a) Tout membre non écossais porte des chaussettes rouges.

   (b) Tout membre porte un kilt ou ne porte pas des chaussettes rouges.

   (c) Les membres mariés ne sortent pas le dimanche.

   (d) Un membre sort le dimanche si et seulement si il est écossais.

   (e) Tout membre qui porte un kilt est marié et écossais.

   (f) Tout membre écossais porte un kilt.

3. Soient les faits suivant :

   Une pièce contient trois objets A, B, et C. C est bleu et A est vert. B est posé sur C et A est posé sur B. Tout objet bleu n'est pas vert[1].

   (a) Axiomatiser ces faits en calcul des prédicats (3 constantes, 3 symboles de prédicat, 5 clauses).

   (b) Montrer par résolution qu'il existe deux objets posé l'un sur l'autre, l'objet supérieur étant vert et l'objet du dessous n'étant pas vert.

   (c) Que peut-on dire de cette démonstration ?

4. La logique *constructive* se décrit facilement en calcul des séquents *intuitioniste*. Un séquent intuitioniste est un séquent dont la partie droite n'est pas un ensemble de formules (cas classique) mais **une seule** formule (Δ est un singleton). Le système de règles d'inférence est alors le suivant (A, B et F sont des formules, Δ et Γ sont des ensembles de

[1] L'unicité de la couleur d'un objet doit être exprimée explicitement pour les besoins d'une preuve.

formules, $\perp$ est un symbole qui peut se prononcer « faux »). On note que les différences avec le cas classique concernent uniquement les règles du « ou » et du « non ».

$$\frac{A, B, \Gamma \longrightarrow F}{A \wedge B, \Gamma \longrightarrow F} \wedge_G \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow A \quad \Gamma \longrightarrow B}{\Gamma \longrightarrow A \wedge B} \wedge_D$$

$$\frac{A, \Gamma \longrightarrow F \quad B, \Gamma \longrightarrow F}{A \vee B, \Gamma \longrightarrow F} \vee_G \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow A}{\Gamma \longrightarrow A \vee B} \vee_D^1 \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow B}{\Gamma \longrightarrow A \vee B} \vee_D^2$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow A \quad B, \Gamma \longrightarrow F}{A \rightarrow B, \Gamma \longrightarrow F} \rightarrow_G \qquad \frac{A, \Gamma \longrightarrow B}{\Gamma \longrightarrow A \rightarrow B} \rightarrow_D$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow A}{\neg A, \Gamma \longrightarrow \perp} \neg_G \qquad \frac{A, \Gamma \longrightarrow \perp}{\Gamma \longrightarrow \neg A} \neg_D$$

$$\frac{A(t), \Gamma \longrightarrow F}{\forall x\, A(x), \Gamma \longrightarrow F} \forall_G \qquad \frac{\Sigma + c; \Gamma \longrightarrow A(c)}{\Sigma; \Gamma \longrightarrow \forall x\, A(x)} \forall_D$$

$$\frac{\Sigma + c; A(c), \Gamma \longrightarrow F}{\Sigma; \exists x\, A(x), \Gamma \longrightarrow F} \exists_G \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow A(t)}{\Gamma \longrightarrow \exists x\, A(x)} \exists_D$$

où, dans les règles $\forall_G$ et $\exists_D$, t désigne un terme sur la signature Σ, dans les règles $\forall_D$ et $\exists_G$, c désigne une nouvelle constante (i.e. $\notin \Sigma$). La signature Σ n'a pas été indiquée au sein de toutes les règles où elle n'est pas modifiée. La notion d'arbre de preuve pour ce calcul est la même que dans le cas classique (le séquent $\Gamma \longrightarrow F$ est un axiome si $F \in \Gamma$). Ce système de règles est correct et complet pour la logique intuitioniste, i.e. si $\models F$ alors il existe un arbre de preuve du séquent $\longrightarrow F$.

(a) Montrer que la formule $\forall x\, (p(x) \vee \neg p(x))$ n'est pas une tautologie en logique intuitioniste.

(b) En déduire quelle formule il est nécessaire de rajouter parmi les hypothèses pour que la preuve du 3b soit réalisable en logique intuitioniste.

(c) Refaire la preuve du 3b en calcul des séquents intuitioniste (question facultative).

2 Calculabilité

1. Montrer que toutes les fonctions décroissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ ($f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n\, f(n+1) \leq f(n)$) sont calculables.
2. Montrer que le problème de l'arrêt pour les machines de Turing possédant une bande finie est décidable. On supposera qu'un mouvement à droite (resp. à gauche) de la tête de lecture positionnée sur la case la plus à droite (resp. la plus à gauche) de la bande n'a pas d'effet (i.e. la tête de lecture reste immobile).