IENAC-S-94 Lundi 30 octobre 1995

Examen de
logique, calculabilité et complexité

Durée : 3 h
Tous documents autorisés

1 Logique

1. Propriétés élémentaires :
   (a) Donner un exemple de formule propositionnelle satisfiable.
   (b) Donner un exemple de formule propositionnelle tautologique.
   (c) Donner un exemple de formule du calcul des prédicats qui n'est validée par aucune interprétation.
2. On appelle *base de connecteur*, un ensemble de connecteurs qui permet de définir tous les autres ($\{\neg, \vee\}$ en est une).
   Le connecteur $\neg\wedge$ est défini par la table de vérité suivante :

p	q	$p \neg\wedge q$
f	f	v
f	v	v
v	f	v
v	v	f

   Montrer que $\{\neg\wedge\}$ est une base de connecteurs.
3. Construire les deux règles d'inférence du calcul des séquents pour le connecteur $\neg\wedge$.
4. On considère la signature $\Sigma = \{v_0, d_0\}$ et l'ensemble de prédicats $P = \{p_3, r_1\}$. Montrer par résolution qu'on peut déduire

   $$\exists x \exists y \exists z (p(x, y, z) \wedge \neg r(x) \wedge \neg r(y) \wedge r(z))$$

   des formules suivantes :

   $$\exists x (p(v, v, x) \wedge p(x, v, d))$$
   $$\neg r(v)$$
   $$r(d)$$

5. Refaire la démonstration précédente en utilisant le calcul des séquents. Pour cela, on commencera par montrer (en calcul des séquents) le lemme suivant :

   $$\forall x (p(x) \vee \neg p(x))$$

   et on ajoutera alors ce lemme aux hypothèses.

2 Calculabilité

1. Montrer (sans donner tous les détails) que toute fonction $f : N \rightarrow N$ Turing-calculable est C-calculable, *i.e.* il existe un programme C qui, prenant x sur son entrée standard, écrit $f(x)$ sur sa sortie standard.
2. Montrer que les fonctions primitives récursives n'ont pas la puissance des machines de Turing.
   Indication : raisonner par l'absurde et utiliser le résultat d'indécidabilité du problème de l'arrêt.

3 Complexité

Dans *une* école, on dispose de salles d'examen dont une, la salle D, qui peut contenir c candidats. On suppose que sont programmés à des horaaires fixés dans la journée des examens $e_1 \ldots e_n$. L'examen e_1 concerne c_1 candidats et dure d_1 heures, …l'examen e_n concerne c_n candidats et dure d_n heures. Dans la salle D peuvent se dérouler plusieurs examens en même temps, dans la limite des places disponibles.

On veut maximiser l'emploi de la salle D en effectuant le plus grand nombre possible d'heures d'examen dans la journée. On se pose donc le problème suivant :

Soit d un entier. Existe-t-il des examens $e_{i_1} \ldots e_{i_p}$ qui peuvent se dérouler dans la salle D avec $d_{i_1} + \ldots + d_{i_p} \geq d$

1. Montrer que ce problème est NP-complet. Indication : utiliser une restriction sur le problème KNAPSACK.
2. Qu'en concluez vous ?