Jeudi 27 septembre 1994

IENAC-S-93

Examen de
logique, calculabilité et complexité

Durée : 3 h
Tous documents autorisés

1 Logique

1. Donner une interprétation qui valide la formule

$$(a \land b) \to (a \leftrightarrow (c \lor b))$$

2. On appelle *base de connecteur*, un ensemble de connecteurs qui permettent de définir tous les autres ($\{\neg, \lor\}$ en est une).
   Montrer que $\{\land, \lor\}$ n'est pas une base de connecteurs.
   Indication : montrer que pour toute fonction f de $\{v, f\}$ dans $\{v, f\}$ définie avec $\land$ et $\lor$, on a $f(v) = v$ (par exemple par récurrence sur le nombre de connecteurs utilisés).
3. On rappelle le système G de règles d'inférences pour le calcul des séquents (A et B sont des formules, Γ et Δ sont des ensembles de formules) :

$$\frac{A, B, \Gamma \longrightarrow \Delta}{A \land B, \Gamma \longrightarrow \Delta} \land_G \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow A, \Delta \quad \Gamma \longrightarrow B, \Delta}{\Gamma \longrightarrow A \land B, \Delta} \land_D$$

$$\frac{A, \Gamma \longrightarrow \Delta \quad B, \Gamma \longrightarrow \Delta}{A \lor B, \Gamma \longrightarrow \Delta} \lor_G \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow A, B, \Delta}{\Gamma \longrightarrow A \lor B, \Delta} \lor_D$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow A, \Delta \quad B, \Gamma \longrightarrow \Delta}{A \to B, \Gamma \longrightarrow \Delta} \to_G \qquad \frac{A, \Gamma \longrightarrow B, \Delta}{\Gamma \longrightarrow A \to B, \Delta} \to_D$$

$$\frac{\Gamma \longrightarrow A, \Delta}{\neg A, \Gamma \longrightarrow \Delta} \neg_G \qquad \frac{A, \Gamma \longrightarrow \Delta}{\Gamma \longrightarrow \neg A, \Delta} \neg_D$$

   Montrer en utilisant ce système que

$$((A \to C) \land (B \to C)) \to ((A \lor B) \to C)$$

   est une tautologie.
4. Montrer par résolution qu'on peut déduire

$$\exists X(\exists Y(sur(X, Y) \land \neg vert(Y) \land vert(X)))$$

   des formules suivantes :

$$\begin{aligned} \forall X(bleu(X) \to \neg vert(X)) \\ bleu(c) \\ vert(a) \\ sur(b, c) \\ sur(a, b) \\ \forall X(\neg vert(X) \lor vert(X)) \end{aligned}$$

5. Question facultative. On étend le système G (question 3) avec des règles pour traiter les quantificateurs du calcul des prédicats :

$$\frac{p(t), \Gamma \longrightarrow \Delta}{\forall x.p(x), \Gamma \longrightarrow \Delta}\forall_G \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow p(c), \Delta}{\Gamma \longrightarrow \forall x.p(x), \Delta}\forall_D$$

$$\frac{p(c), \Gamma \longrightarrow \Delta}{\exists x.p(x), \Gamma \longrightarrow \Delta}\exists_G \qquad \frac{\Gamma \longrightarrow p(t), \Delta}{\Gamma \longrightarrow \exists x.p(x), \Delta}\exists_D$$

où :
– dans les règles $\forall_G$ et $\exists_D$, t désigne un terme quelconque (voir les indications pour la preuve demandée) ;
– dans les règles $\forall_D$ et $\exists_G$, c désigne une nouvelle constante qui n'aura le droit d'apparaître que dans la preuve du séquent correspondant (respectivement $(\Gamma \longrightarrow p(c), \Delta)$ et $(p(c), \Gamma \longrightarrow \Delta)$).

Montrer avec ce système qu'on peut déduire $s(j)$ des formules suivantes :

$$\begin{aligned} h(j) \\ \forall x(b(x) \rightarrow a(x)) \\ \forall x \forall y((h(y) \wedge i(x,y) \wedge a(x)) \rightarrow d(x)) \\ \forall y((\forall x(i(x,y) \wedge b(x)) \rightarrow d(x)) \rightarrow s(y)) \end{aligned}$$

Indication : Lors de l'utilisation de la règle $\forall_G$, pour un $\forall y$, on choisira $t = j$ et pour un $\forall x$, on choisira $t = c$, c étant la constante introduite par l'emploi de la règle $\forall_D$ (à appliquer le plus tôt possible).

2 Calculabilité

Un nombre réel a est dit à décimales calculables s'il existe un algorithme (i.e. une machine de Turing) qui permet de dire, pour tout entier n, quelle est la n-ème décimale de a.

1. $\sqrt{2}$ est-il un nombre réel à décimales calculables ?
2. Prouver qu'il existe des nombres réels qui ne sont pas à décimales calculables (on pourra en construire un en utilisant le résultat d'indecidabilité de l'arrêt des machines de Turing).

3 Complexité

On considère les deux problèmes suivants :
– $K(d, n, s_1, \ldots, s_n)$: d, n, s_1,…,s_n étant des entiers strictement positifs, existe-t-il une partie U de $\{1, \ldots, n\}$ telle que $\sum_{i \in U} s_i = d$?
– $P(n, s_1, \ldots, s_n)$: n, s_1,…,s_n étant des entiers strictement positifs, existe-t-il une partition $\{1, \ldots, n\} = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$ telle que $\sum_{i \in U} s_i = \sum_{i \in V} s_i$

1. Montrer que $P \propto_p K$
2. Montrer que K et P appartiennent à NP en montrant que $K \propto_p SAT$ (on pourra exprimer que $\sum_{i \in U} s_i = d$ par une bijection de l'ensemble $\{1, \ldots, d\}$ sur une réunion d'ensembles S_1, S_2 …à s_1, s_2, …éléments, c'est-à-dire en utilisant $d(\sum_{1 \leq i \leq n} s_i)$ variables booléennes : la variable $v_{ijk}, 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq j$ est vraie si le k-ème éléments de l'ensemble S_j est l'image de i).