

Examen de  
logique formelle  
Durée : 1 h  
Tous documents autorisés

## 1 Bases

1. En calcul des propositions, sur un ensemble de  $n$  variables, donner le nombre de formules non-équivalentes et le nombre de clauses distinctes possibles. Pourquoi ces deux nombres sont-ils différents ?
2. En calcul des prédicats, écrire un ensemble (fini) de clauses qui permet d'engendrer par résolution un nombre infini d'autres clauses.

## 2 Calcul des propositions

1. Prouver en utilisant la méthode des séquents que la formule suivante n'est pas une tautologie :

$$(a \rightarrow (b \rightarrow d)) \rightarrow (a \rightarrow (d \rightarrow b))$$

Déduire de cet arbre de déduction une interprétation qui ne la satisfait pas.

## 3 Calcul des prédicats

1. Choisir une signature et un ensemble de symboles de prédicat pour axiomatiser les faits suivants :

Jean est le père de Paul. Paul est le père de Martin. Paul est le père de Marie. Patricia est la mère de Martin. Marie est la mère de Luc. Un individu est le *parent* d'un autre s'il en est le père ou la mère. Un individu X est l'ancêtre d'un individu Y s'il existe un individu dont X est le parent et qui est un ancêtre de Y. Un individu est toujours l'ancêtre de lui même.
2. En utilisant la résolution, prouver que Paul est un ancêtre de Luc. Prouver que Paul n'est pas l'ancêtre de Jean.
3. Écrire la formule qui exprime que tout individu possède une mère. Skolémiser cette formule. Comment peut-on interpréter le symbole fonctionnel introduit lors de cette skolémisation.
4. Soit le prédicat `frère_ou_soeur` d'arité 2. Donner une formule qui lie ce prédicat au prédicats `père/2` et `mère/2`.