

Examen de
logique formelle
Durée : 1 h
Tous documents autorisés

1 Bases

1. [3pt] Soit \mathcal{F} l'ensemble des formules du calcul des propositions. Soit \mathcal{F}^2 l'ensemble des formules écrites sous forme clausale avec des clauses à au plus 2 littéraux. Montrer que $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}^2$.
2. [2pt] On considère une formule du calcul des prédicats sur la signature $\Sigma = \{a_0, b_0\}$ et $P = \{p_1, q_1\}$. Quelle est la taille d'une table de vérité permettant de montrer que cette formule est une tautologie? Justifier.

2 Calcul des propositions

1. [6pt] Formaliser le raisonnement suivant et prouver le en utilisant le calcul des séquents.

Si les poules ont des dents, alors les crabes sont des mammifères. Les poules sont carnivores, ou les crabes ne sont pas des mammifères. Et l'affirmation que les poules ont des dents et qu'elles sont carnivores est fausse. Donc : les poules n'ont pas de dents.

2. [2pt] Proposer une phrase supplémentaire, utilisant uniquement les propositions élémentaires du raisonnement précédent, qui l'invalidé.

3 Calcul des prédicats

1. [7pt] Soit la signature $\Sigma = \{f_1, g_2\}$ et l'ensemble de symboles de prédicat $P = \{p_1, s_1, q_2, r_2\}$. Montrer en utilisant la méthode de résolution que $\exists x \exists y \exists z q(y, g(z, f(x)))$ est conséquence de $\{F_1, F_2, F_3, F_4\}$.

$$\begin{array}{ll}
 F_1 & \forall x \neg s(f(x)) \\
 F_2 & \forall y \forall z (p(z) \rightarrow (s(y) \vee q(y, z))) \\
 F_3 & \exists x \exists y r(x, y) \\
 F_4 & \forall x \forall y (r(x, y) \rightarrow p(g(x, f(y))))
 \end{array}$$