Examen de logique formelle

Durée : 2 h

Tous documents autorisés

Ce sujet comporte 2 pages.

1 Bases

1. On considère la formule $E = (B \wedge C) \rightarrow (A \leftrightarrow (\neg B \vee C))$, dans laquelle A,B et C sont des variables propositionnelles.
   (a) Déterminer une formule logiquement équivalente à E écrite sans autre symbole de connecteur que $\rightarrow$ et $\leftrightarrow$
   (b) Donner les formes normales conjonctives et disjonctives de E.
   (c) Montrer que les formules E et $C \rightarrow (B \rightarrow A)$ sont logiquement équivalentes.

2 Calcul des propositions

1. Montrer, en utilisant le principe de résolution, que la formule suivante est une tautologie :

$$(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$$

2. Un coffre fort est muni de n serrures et ne peut être ouvert que lorsque les n serrures sont simultanément en position ouverte. Cinq personnes : Alice, Bernard, Christine, Dominique et Émile reçoivent chacun des clés, correspondant à certaines de ces serrures. Quel doit être la valeur de n et quelles clés doivent avoir nos cinq personnes pour que le coffre puisse être ouvert si et seulement si l'on se trouve dans l'une des situations suivantes :
   - Présence de Alice et Bernard ;
   - Présence de Alice, Christine et Dominique ;
   - Présence de Bernard, Dominique et Emile.

   Indication : Axiomatiser et mettre sous forme normale conjonctive.

3 Calcul des prédicats

1. Le langage $\mathcal{L}$ est constitué d'un symbole de fonction unaire f et d'un symbole de fonction binaire g. On considère les formules closes suivantes :

$$\begin{aligned} F_1 &: \exists x \exists y\, f(g(x,y)) = f(x) \\ F_2 &: \forall x \forall y\, f(g(x,y)) = f(x) \\ F_3 &: \exists x \forall y\, f(g(x,y)) = f(x) \end{aligned}$$

   On considère les interprétations suivantes dont l'ensemble de base est $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, où g est interprété par l'application $(m,n) \mapsto m+n$ et où f est interprété, respectivement, par :
   (a) l'application constante égale à 42 ;
   (b) l'application qui à tout entier associe le reste de sa division euclidienne par 4 ;
   (c) l'application $n \mapsto \min(n^2+2, 19)$.

   Dans chacune des interprétations, indiquer quelles formules sont satisfaites parmi les trois formules proposées.

2. On considère l'ensemble de trois formules suivantes d'un langage qui comporte exactement un prédicat binaire p, deux constantes a et b et une fonction unaire f.

$$\begin{array}{rcl} A & : & \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z) \\ B & : & \forall x\ p(a,x) \vee p(b,x) \\ C & : & \forall x\ p(x, f(x)) \end{array}$$

   (a) Montrer par résolution que $\{A, B, C\}$ a pour conséquence $\forall x \forall y\ p(x,y) \rightarrow p(x, f(y))$

   (b) Trouver une interprétation (domaine et interprétation de a, b, p et f) qui montre que $\exists x\ p(x,a)$ n'est pas une conséquence de $\{A, B, C\}$