Examen de logique formelle et calculabilité

Durée : 2 h

Tous documents autorisés

Logique

1. Soit l'ensemble de connecteurs $\mathcal{C} = \{\rightarrow, F\}$ où F est la constante interprétée par *faux* dans toutes les interprétations.
   (a) Dire en justifiant pour chacune des formules suivantes si
      i. elle est satisfiable ;
      ii. c'est une tautologie.

$$F_1 = (p \rightarrow q) \rightarrow p \quad (1)$$
$$F_2 = (q \rightarrow p) \rightarrow p \quad (2)$$
$$F_3 = ((p \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow (p \rightarrow F) \quad (3)$$

   (b) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de connecteurs.
2. Montrer que le raisonnement suivant est valide ou contradictoire (faire deux preuves, en utilisant le calcul des séquents et le principe de résolution)

   Si je vais en cours demain matin alors je dois me lever demain matin et si je vais au break ce soir alors je me coucherais tard ce soir. Si je me couche tard et que je me lève tôt alors je passerai la journée avec seulement cinq heures de sommeil. Après seulement cinq heures de sommeil je dois faire la sieste pendant le cours de logique. Donc je n'irai pas en cours demain matin ou je n'irai pas au break ce soir ou je ferai la sieste pendant le cours de logique.
3. Soit une relation binaire R sur un ensemble quelconque (par exemple $\leq$ dans $\mathbb{N}$)
   (a) Axiomatiser et donner 3 formules pour exprimer
      i. le fait que la relation est symétrique ;
      ii. le fait que la relation est transitive ;
      iii. le fait que pour tout élément e de l'ensemble, e est en relation avec un élément de l'ensemble.
   (b) Montrer par résolution qu'une relation vérifiant les 3 propriétés précédentes est réflexive.
4. Donner un arbre de déduction pour le séquent suivant

$$\longrightarrow (\exists x\ p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\exists y\ q(y))$$

Calculabilité

1. Construire une machine de Turing qui change le contenu de *chaque* case de la bande une infinité de fois (cette machine ne s'arrête jamais). Préciser l'alphabet choisi et la configuration initiale.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui ne soit pas calculable et telle que la fonction $g(n) = f(n)^2 - 3f(n)$ soit calculable. Indication : la fonction nulle $(\lambda x.0)$ est calculable.
3. Argumenter pour dire si oui ou non la fonction d'Ackermann est calculable avec une machine de Turing à bande finie.