

Examen de  
logique formelle et calculabilité  
Durée : 2 h  
Tous documents autorisés

## Logique

1. Expliquer pourquoi l'éditeur de la revue "Theory and Practice of Logic Programming", qui s'intéresse à la démonstration automatique comme outil de programmation, a choisi le logo suivant :

$$\models \equiv \vdash$$

Pour celà, on expliquera chacun des symboles et on illustrera leur signification avec des exemples.

2. Montrer, en utilisant le principe de résolution ou le calcul de séquents, que la formule suivante est une tautologie :

$$(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow (p \vee r))$$

3. « Sam est le père de Jim qui est marié à Lucy. Fred, fils de Jim et Lucy est marié avec Lynn et ils ont une fille, Ann. »

- (a) Axiomatiser la généalogie précédente (à l'aide de constantes pour les individus et de symboles de prédicat d'arité 2).
- (b) Soit le prédicat  $p(x, y)$  signifiant  $y$  est le fils ou la fille de  $x$ . Proposer une formule pour relier le prédicat  $p$  à ceux de la question précédente.
- (c) Le prédicat  $a(x, y)$  signifie que  $x$  est un ancêtre de  $y$ . Il peut être « défini » avec  $p$  par

$$\forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow a(x, y)) \wedge ((\exists z p(x, z) \wedge a(z, y)) \rightarrow a(x, y))$$

Expliciter cette formule en français et montrer, en utilisant le principe de résolution ou le calcul de séquents, que Sam est un ancêtre de Ann.

## Calculabilité

1. Un ensemble *primitif récursif* est un ensemble dont la fonction caractéristique est primitive récursive.  
Montrer que tout sous-ensemble fini de  $\mathbb{N}$  est primitif récursif.
2. Soit la fonction de FIBONACCI définie par

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Donner un  $\lambda$ -terme pour calculer  $f$  (sur les entiers de CHURCH). Indication : utiliser une itération sur une paire.