Corrigé de logique

P. Brisset

1. (a) Soit $\Sigma = \emptyset$, $P = \{p_1\}$ et $D = \mathbb{N}$ domaine d'interprétation. La formule

$$\forall x\, p(x)$$

est satisfiable (on interprète p par $\lambda x.(x \geq 0)$) mais non tautologique (on interprète p par $\lambda x.(x > 0)$).

(b) Étant donné que
– le nombre d'atomes dans une formule est fini (n) ;
– le nombre d'interprétations possibles pour un atome est fini (2)
le nombre d'interprétations possibles de la formule est fini (2^n) donc elle peuvent être toutes testées par un algorithme en temps fini. Le problème de satisfiabilité (existence d'une interprétation validant la formule) est donc décidable.

2. (a) C et C' sont des conjonctions donc il suffit de montrer que pour tout j, on a $c_j \leftrightarrow C'_j$. L'équivalence peut se montrer en utilisant, par exemple, une table de vérité. Par exemple pour $k = 2$, ($C'_j = \{\{l_1, l_2, u_j^1\}, \{l_1, l_2, \neg u_j^1\}\}$) :

l_1	l_2	u_j^1	$l_1 \vee l_2 \vee u_j^1$	$l_1 \vee l_2 \vee \neg u_j^1$	C'_j	c_j
v	v	v	v	v	v	v
f	v	v	v	v	v	v
v	f	v	v	v	v	v
f	f	v	v	f	f	f
v	v	f	v	v	v	v
f	v	f	v	v	v	v
v	f	f	v	v	v	v
f	f	f	f	v	f	f

On procède de même pour les autres k.

(b) On rajoute 4 nouvelles variables u_1^1, u_2^1, u_3^1 et u_3^2 et on obtient :

$$\begin{array}{rcl} C'_1 & = & \{\{p, q, u_1^1\}, \{p, q, \neg u_j^1\}\}\} \\ C'_2 & = & \{\{\neg p, \neg q, u_2^1\}\{\neg u_2^1, r, s\}\} \\ C'_3 & = & \{\{\neg r, u_3^1, u_3^2\}, \{\neg r, \neg u_3^1, u_3^2\}, \{\neg r, u_3^1, \neg u_3^2\}, \{\neg r, \neg u_3^1, \neg u_3^2\}\} \end{array}$$

3. (a) Pour prouver par résolution, il faut raisonner par réfutation, c-à-d considérer la négation de la conclusion. On obtient donc les clauses suivantes :

$$\forall y\ p(a,y,y) \tag{1}$$
$$\forall x \forall y \forall z\ p(x,y,z) \rightarrow p(s(x),y,s(z)) \tag{2}$$
$$\forall x_1 \forall x_2\ \neg p(x_1,x_2,s(a)) \tag{3}$$

Par résolution entre (3) et (1), on obtient la clause vide avec la substitution $[x_1 \leftarrow a, x_2 \leftarrow s(a)]$ qui constitue la première « solution ».

Seconde preuve :

$$\begin{array}{lcll} (3) \text{ et } (2) & \longrightarrow & \neg p(x,x_2,a) \text{ avec } [x_1 \leftarrow s(x), y \leftarrow x_2, z \leftarrow a] & (4) \\ (4) \text{ et } (1) & \longrightarrow & \emptyset \text{ avec } [x \leftarrow a, x_2 \leftarrow a] & (5) \end{array}$$

d'où la substitution solution : $[x_1 \leftarrow s(a), x_2 \leftarrow a]$

(b) Première preuve (on souligne à chaque étape la formule concernée par la règle appliquée ; pour les règles $\exists_D$ et $\forall_G$, le terme t correspondant à une variable x est noté t_x) :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{t_{x_1}=a,\ t_{x_2}=t_y=s(a)}{\Sigma; \underline{p(a,t_y,t_y)}, (2) \longrightarrow \underline{p(t_{x_1},t_{x_2},s(a))}}\text{axiome}}{\Sigma; \underline{(1)}, (2) \longrightarrow p(t_{x_1},t_{x_2},s(a))}\forall_G}{\Sigma; (1), (2) \longrightarrow \underline{\exists x_1 \exists x_2 p(x_1,x_2,s(a))}}\exists_D^2$$

Seconde preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{t_x=a,\ t'_y=t_{x_2}=a}{\Sigma; (1), (2), p(a,t'_y,t'_y) \longrightarrow p(t_x,t_{x_2},a)}\text{axiome}}{\Sigma; \underline{(1)}, (2) \longrightarrow p(t_x,t_{x_2},a)}\forall_G}{\Sigma; (1), (2), \underline{p(t_x,t_y,t_z) \rightarrow p(s(t_x),t_y,s(t_z))} \longrightarrow p(t_{x_1},t_{x_2},s(a))}\rightarrow'_G \text{ avec } \dagger}{\Sigma; (1), \underline{(2)} \longrightarrow p(t_{x_1},t_{x_2},s(a))}\forall_G^3}{\Sigma; (1), (2) \longrightarrow \underline{\exists x_1 \exists x_2 p(x_1,x_2,s(a))}}\exists_D^2$$

$\dagger$: $t_{x_1}=s(t_x)$, $t_{x_2}=t_y$ et $t_z=a$.
d'où $t_{x_1}=s(a)$ et $t_{x_2}=a$.

(c) Pour $D=\mathbb{N}$, on interprète s par $\lambda x.(x+1)$, a par 0 et p par $\lambda xyz.(x+y=z)$. Les résultats précédents s'intepètent alors naturellement (i.e. dans l'ensemble des entiers naturels) par $0+1=1$ et $1+0=1$.