Corrigé de logique formelle

1 Bases

1. On considère la formule $E = (B \wedge C) \rightarrow (A \leftrightarrow (\neg B \vee C))$, dans laquelle A,B et C sont des variables propositionnelles.
   (a) En utilisant les équivalences
   $$\begin{aligned} \neg p \vee q &\equiv p \rightarrow r \\ (p \wedge q) \rightarrow r &\equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) \end{aligned}$$
   on obtient
   $$E \equiv B \rightarrow (C \rightarrow (A \leftrightarrow (B \rightarrow C)))$$
   (b) On obtient (fastidieux, il est judixieux de remarquer que $A \vee (A \wedge B) \equiv A \wedge (A \vee B) \equiv A$) pour la forme normale conjonctive
   $$E \equiv (\neg A \vee \neg B \vee C \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (B \vee A \vee \neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee A \vee \neg B \vee \neg C)$$
   soit après simplification
   $$\neg C \vee A \vee \neg B$$
   On remarque que cette forme est également une forme normale disjonctive.
   (c) Montrer que les formules E et $C \rightarrow (B \rightarrow A)$ sont logiquement équivalentes.

2 Calcul des propositions

1. Il faut faire une démonstration par réfutation. On considère la négation de la formule et on la met sous forme clausale (normale conjonctive). On obtient les quatre clauses suivantes
   $$q \rightarrow r \tag{1}$$
   $$p \vee q \tag{2}$$
   $$\neg p \tag{3}$$
   $$\neg r \tag{4}$$
   qui permettent d'obtenir la clause vide par résolution (3 étapes). On peut donc conclure que la formule originale est une tautologie.
2. `[http://www.dma.ens.fr/~chomette/TD.html]` On associe à la présence de chacunne des personnes une variable propositionnelle : A, B, C, D, et E. L'énoncé indique que la porte peut être ouverte si la formule suivante est vérifiée
   $$(A \wedge B) \vee (A \wedge C \wedge D) \vee (B \wedge D \wedge E)$$
   La mise sous forme normale conjonctive (fastidieuse) permet d'obtenir la formule équivalente
   $$(A \vee B) \wedge (A \vee D) \wedge (A \vee E) \wedge (B \vee C) \wedge (B \vee D)$$
   Il reste à interpréter cette conjonction en termes de serrures : on associe une clé à chaque clause. On obtient donc une solution avec $n = 5$ et la répartition suivante :
   - Alice et Bernard possèdent la première clé
   - Alice et et Dominique possèdent la seconde clé
   - Alice et Émile possèdent la troisième clé
   - Bernard et Christinne possèdent la quatrième clé
   - Bernard et Dominique possèdent la cinquième clé

3 Calcul des prédicats

1. Le langage $\mathcal{L}$ est constitué d'un symbole de fonction unaire f et d'un symbole de fonction binaire g. On considère les formules closes suivantes :

$$\begin{array}{lcl} F_1 & : & \exists x \exists y\ f(g(x,y)) = f(x) \\ F_2 & : & \forall x \forall y\ f(g(x,y)) = f(x) \\ F_3 & : & \exists x \forall y\ f(g(x,y)) = f(x) \end{array}$$

   f est interprété par :

   (a) l'application constante égale à 42 : les trois formules sont satisfaites puisque les deux membres de l'égalités valent toujours 42

   (b) l'application qui à tout entier associe le reste de sa division euclidienne par 4 :
   - F_1 : oui en prenant par exemple $y = 4$
   - F_2 : non en prenant par exemple $x = 1$ et $y = 4$
   - F_1 : non, on a $\exists x \forall y\ x + y \equiv x[4]$, ce qui équivalent à $\forall y\ y \equiv 0[4]$ qui est clairement faux.

   (c) l'application $n \mapsto \min(n^2 + 2, 19)$:
   - F_1 : oui en prenant par exemple $x = 100$
   - F_2 : non en prenant par exemple $y = 100$
   - F_1 : oui en prenant par exemple $x = 5$

2.

$$\begin{array}{lcl} A & : & \forall x \forall y \forall z (p(x,y) \wedge p(y,z)) \rightarrow p(x,z) \\ B & : & \forall x\ p(a,x) \vee p(b,x) \\ C & : & \forall x\ p(x, f(x)) \end{array}$$

   (a) Par réfutation, en prenant la négation de la conséquence voulue, on obtient $\exists x \exists y\ p(x,y) \wedge \neg p(x, f(y))$ qu'on skolémise (avec c_1 et c_2) pour obtenir $p(c_1, c_2) \wedge \neg p(c_1, f(c_2))$, soient deux clauses ($D$, E). Les formules A, B et C sont déjà des clauses.

   Résolution :

   i. E et A avec $x = c_1$ et $z = f(c_2)$: $\neg p(c_1, y) \vee \neg p(y, f(c_2))$

   ii. ... et C avec $x = c_2$: $\neg p(c_1, c_2)$

   iii. et D : clause vide. CQFD.

   (b) $\exists x\ p(x, a)$ **est** conséquence de B ! Trivial par résolution.