Corrigé de logique formelle et calculabilité

Logique

1. (a)

Formule	Satisfiable	avec	Tautologique	car
F_1	oui	$I(p) = v$	non	$I(p) = f$
F_2	oui	$I(p) = v$	non	$I(p) = I(q) = f$
F_3	oui	$I(p) = f$	non	$I(p) = f$

   (b) On montre que $\mathcal{C}$ est une base de connecteurs en exprimant une base connue avec $\mathcal{C}$, par exemple

$$\begin{aligned} \neg p &\equiv \neg p \vee F \equiv p \rightarrow F \\ p \vee q &\equiv \neg(\neg p) \vee q \equiv \neg p \rightarrow q \equiv (p \rightarrow F) \rightarrow q \end{aligned}$$

2. On considère les variables propositionnelles suivantes :
   - v : je vais en cours demain matin ;
   - l : je me lève demain matin ;
   - b : je vais au break ce soir ;
   - t : je me couche tard ce soir ;
   - s : cinq heures de sommeil ;
   - q : sieste pendant le cours de logique.

   Ce qui permet d'exprimer que

$$v \rightarrow l \tag{1}$$
$$b \rightarrow t \tag{2}$$
$$t \wedge l \rightarrow s \tag{3}$$
$$s \rightarrow q \tag{4}$$

   doit permettre de déduire $\neg v \vee \neg b \vee q$.

   Par résolution : on essaye d'obtenir la clause vide avec la négation de la conclusion qui donne 3 clauses :

$$v \tag{5}$$
$$b \tag{6}$$
$$\neg q \tag{7}$$

   D'où :

$$(5),(1) \rightarrow l \tag{8}$$
$$(8),(3) \rightarrow t \rightarrow s \tag{9}$$
$$(9),(2) \rightarrow b \rightarrow s \tag{10}$$
$$(10),(6) \rightarrow s \tag{11}$$
$$(11),(4) \rightarrow q \tag{12}$$
$$(12),(7) \rightarrow \square$$

   Donc la déduction est correcte.

Pour une démonstration en calcul des séquents, il n'est pas nécessaire de transformer les formules :

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{(1), \underline{b} \longrightarrow \neg v, \underline{b}}}{(1) \longrightarrow \neg v, \underline{\neg b}, b}\,\neg_D}{(1), \underline{(2)} \longrightarrow \neg v, \neg b, \underline{t}}\,\rightarrow'_D \qquad \dfrac{\dfrac{\overline{(2), \underline{v} \longrightarrow \neg b, \underline{v}}}{(2) \longrightarrow \underline{\neg v}, \neg b, v}\,\neg_D}{\underline{(1)}, (2) \longrightarrow \neg v, \neg b, \underline{l}}\,\rightarrow'_D}{(1), (2) \longrightarrow \neg v, \neg b, t \wedge l}\,\wedge_D}{(1), (2), \underline{(3)} \longrightarrow \neg v, \neg b, \underline{s}}\,\rightarrow'_D}{(1), (2), (3), \underline{(4)} \longrightarrow \neg v, \neg b, \underline{q}}\,\rightarrow'_D}{(1), (2), (3), (4) \longrightarrow \neg v \vee \neg b \vee q}\,\vee^3_D}{}
$$

3. (a) Soit p_2 la relation. Les trois propriétés s'expriment avec

$$\forall x \forall y (p(x, y) \rightarrow p(y, x)) \quad \text{Symétrie} \tag{13}$$

$$\forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z)) \quad \text{Transitivité} \tag{14}$$

$$\forall x \exists y\ p(x, y) \tag{15}$$

(b) La réflexivité s'exprime par $\forall x\ p(x, x)$. Il faut en prendre la négation pour faire une résolution. On obtient après skolémisation

$$\neg p(a, a) \tag{16}$$

avec a_0 une nouvelle constante.

Il faut également skolémiser la formule (15) ce qui donne

$$\forall x\ p(x, f(x)) \tag{17}$$

avec f_1 un nouveau symbole fonctionnel. On obtient ainsi une forme clausale qu'on résout

$$(16), (14) \quad \rightarrow \quad \neg p(a, y) \vee \neg p(y, a) \tag{18}$$

$$(18), (17) \quad f \quad \neg p(f(a), a) \tag{19}$$

$$(19), (13) \quad f \quad \neg p(a, f(a)) \tag{20}$$

$$(20), (17) \quad f \quad \square$$

Donc l'ensemble de clauses est contradictoire, donc on a déduit des hypothèses que la relation est réflexive.

4.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{a\};\ \longrightarrow p(a), q(t)}{\{a\}; p(a) \rightarrow q(a) \longrightarrow q(t)}\,\rightarrow'_{D}(t{=}a)}{\{a\}; p(a) \rightarrow q(a) \longrightarrow \exists y\ q(y)}\,\exists_D(t \text{ sur } \{a\})}{\emptyset; \exists x\ p(x) \rightarrow q(x) \longrightarrow \exists y\ q(y)}\,\exists_G(a)}{\emptyset;\ \longrightarrow (\exists x\ p(x) \rightarrow q(x)) \rightarrow (\exists y\ q(y))}\,\rightarrow_D
$$

NB : ceci constitue uniquement un arbre de déduction et pas un arbre de preuve.

Calculabilité

1. On considère une machine fonctionnant avec les symboles $\{B, 0, 1\}$ et démarrant avec une bande blanche infinie à gauche et à droite. L'idée est de faire des aller-retours de gauche à droite et de droite à gauche en échangeant les 0 et les 1 et en écrivant un 1 sur un blanc à chaque demi-tour. Voir la figure 1.

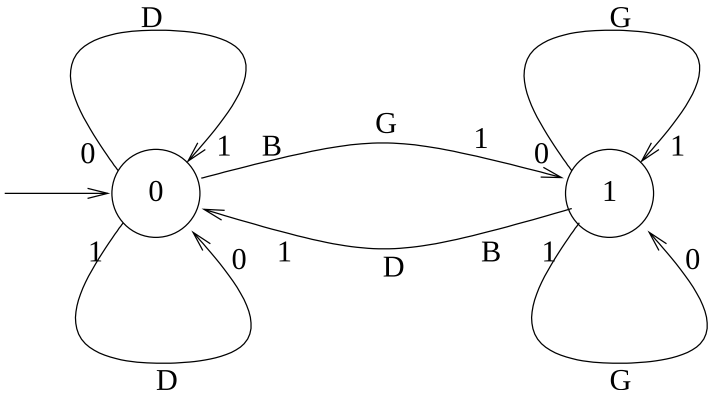

FIG. 1 – Une machine de Turing qui écrit tout partout

2. Soit f définie à partir d'une énumération de l'ensemble des machines de Turing :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \text{ si la machine de Turing d'indice } x \text{ s'arrête} \\ f(x) & = & 3 \text{ sinon} \end{array}$$

   Grâce au théorème d'indécidabilité du problème de l'arrêt, f est non calculable. Et $g = f^2 - 3f$ est la fonction nulle. Donc calculable.

3. Oui la fonction d'Ackermann est calculable avec une mémoire finie... mais par pour n'importe quels arguments : la mémoire nécessaire (une pile pour la définition récursive) est au moins linéaire avec le premier argument de la fonction. Donc non bornée.

   Le fait d'utiliser une mémoire finie rend beaucoup de propriétés décidables mais limite considérablement l'usage de la machine.