Corrigé de logique formelle et calculabilité

Logique

1. Le signe $\models$ signifie la *conséquence logique*. On écrit $A \models B$ si B est vrai quand A l'est (i.e. pour les interprétations qui valident A). Cette notion est liée à la *sémantique* asssociée aux formules.
   Le signe $\vdash$ signifie la prouvabilité. On écrit $A \vdash B$ si B est prouvable avec A comme hypothèse, i.e. il existe un calcul, une *preuve* dont l'entrée est A et dont le résultat est B. Cette notion est liée à la théorie de preuve considérée (résolution, calcul des séquents,...) ; elle est uniquement *syntaxique*.
   En "Logic Programming" ou *programmation logique*, l'idée est d'utiliser une méthode de preuve comme outil de calcul généraliste ; ceci n'a de sens que si la méthode de preuve est correcte (si $B \vdash A$ alors $B \models A$) et complète (si $B \models A$ alors $B \vdash A$). Le logo

   $$\models \equiv \vdash$$

   constitue donc l'essence de la logique du point de vue calculatoire (qui est le seul intéressant à mon avis).
2. En utilisant le calcul de séquents il s'agit de montrer que $\longrightarrow (q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))$ est un séquent valide, i.e. est racine d'un arbre de preuve.
   En utilisant les règles du système G et la règle $\to'_G$ vue en exercice, on peut écrire :

   $$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{q \to r, \underline{p} \longrightarrow \underline{p}} \qquad \dfrac{\overline{\underline{q} \longrightarrow \underline{q}}}{q \to r, q \longrightarrow r}\to'_G}{q \to r, p \vee q \longrightarrow p, r}\vee_G}{q \to r, p \vee q \longrightarrow p \vee r}\vee_D}{\longrightarrow (q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r))}\to^2_D$$

3. (a) On choisit les prédicats $pere(x, y)$ pour « x est le pere de y » et $mere(x, y)$ pour « x est la mère de y » et les symboles de constantes sam, jim, $lucy$, $fred$, $lynn$ et ann. La généalogie s'écrit alors :

   $$pere(sam, jim) \tag{1}$$
   $$pere(jim, fred) \tag{2}$$
   $$mere(lucy, fred) \tag{3}$$
   $$pere(fred, ann) \tag{4}$$
   $$mere(lynn, ann) \tag{5}$$

   (b)

   $$\forall x \forall y \ (pere(x, y) \vee mere(x, y)) \to p(x, y) \tag{6}$$

(c)

$$\forall x \forall y\ (p(x,y) \rightarrow a(x,y)) \vee ((\exists z\ p(x,z) \wedge a(z,y)) \rightarrow a(x,y)) \tag{7}$$

signifie qu'un ancêtre est un parent direct (père ou mère) ou l'ancêtre d'un parent direct (z dans la formule).
Il s'agit de prouver $a(sam, ann)$. On choisit d'utiliser le principe de résolution car les formules sont pratiquement sous formes clausales. La formule 6 donne

$$\forall x \forall y\ pere(x,y) \rightarrow p(x,y) \tag{8}$$
$$\forall x \forall y\ mere(x,y) \rightarrow p(x,y) \tag{9}$$

La formule 7 donne

$$\forall x \forall y\ p(x,y) \rightarrow a(x,y) \tag{10}$$
$$\forall x \forall y \forall z\ (p(x,z) \wedge a(z,y)) \rightarrow a(x,y) \tag{11}$$

et reste la négation de la conclusion

$$\neg a(sam, ann) \tag{12}$$

D'où :

$$12, 11_{x=sam,y=ann} \rightsquigarrow \neg p(sam,z) \vee \neg a(z,ann) \tag{13}$$
$$13, 8_{x=sam,y=z} \rightsquigarrow \neg pere(sam,z) \vee \neg a(z,ann) \tag{14}$$
$$14_{z=jim}, 1 \rightsquigarrow \neg a(jim,ann) \tag{15}$$
$$15, 11_{x=jim,y=ann,z=z'} \rightsquigarrow \neg p(jim,z') \vee \neg a(z',ann) \tag{16}$$
$$16, 8_{x=jim,y=z'} \rightsquigarrow \neg pere(jim,z') \vee \neg a(z',ann) \tag{17}$$
$$17_{z'=fred}, 2 \rightsquigarrow \neg a(fred,ann) \tag{18}$$
$$18, 10_{x=fred,y=ann} \rightsquigarrow \neg p(fred,ann) \tag{19}$$
$$19, 8_{x=fred,y=ann} \rightsquigarrow \neg pere(fred,ann) \tag{20}$$
$$20, 4 \rightsquigarrow \square \tag{21}$$

Calculabilité

1. Soit n le cardinal d'un ensemble fini A et a_1, a_2, ... a_n les éléments de A. On peut définir la fonction caractéristique de A par

$$\chi_A(x) = e(x,a_1) + ... + e(x,a_n) \tag{22}$$

où e est la fonction d'égalité. On sait (cours) que l'addition est primitive récursive et il reste à montrer que e l'est également: hors ceci a été vu dans le cadre du λ-caccul avec les entiers de Church (par différence et test à zéro).
Donc par composition la fonction χ_A est primitive récursive et A est un ensemble primitif récursif.

2. Erreur dans l'énoncé, il fallait évidemment lire

$$\begin{array}{rcl} f(0) & = & 0 \\ f(1) & = & 1 \\ f(n) & = & f(n-1) + \mathbf{f}(n-2) \text{ pour } n \geq 2 \end{array}$$

On considère l'itération

$$(0,1) \to (1,1) \to \ldots \to (a,b) \to (b, a+b) \to \ldots \to (f(n), f(n+1))$$

En reprenant les définitions classiques pour les entiers et les paires, on obtient en utilisant l'entier de CHURCH n comme un répétiteur :

$$\begin{array}{rcl} \overline{0} & = & \lambda fx.x \\ \overline{+1} & = & \lambda nfx.(n\ f\ (f\ x)) \\ PLUS & = & \lambda nm.(n\ \overline{+1}\ m) \\ < A, B > & = & \lambda z.(z\ A\ B) \\ FST & = & \lambda p.(p\ \lambda xy.x) \\ SND & = & \lambda p.(p\ \lambda xy.y) \\ STEP & = & \lambda p. < SND\ p, (PLUS\ (FST p)\ (SND p)) > \\ FIBO & = & \lambda n.(FST\ (n\ STEP\ < \overline{0}, \overline{1} >)) \end{array}$$