

Examen de Calculabilité

Durée : 1h30
Sans documents

Cours

1. Qu'est-ce que la « thèse de Church » ?
2. Donner un exemple de propriété indécidable.
3. Donner quatre exemples de modèles de calcul.

λ -calcul

Les entiers de Church ne permettent de représenter que les entiers positifs. On choisit de représenter un entier relatif n de \mathbb{Z} en λ -calcul par une paire (n_1, n_2) de deux entiers de Church tels que $n = n_1 - n_2$. On remarque que cette représentation n'est pas unique.

1. Donner le λ -terme qui transforme un entier de Church standard (positif) en un entier relatif.
2. Donner le λ -terme qui effectue la multiplication de deux entiers relatifs **en utilisant** les opérateurs vus en cours ($\bar{+}$, $<$, $>$, ...)

Machines de Turing

Construire une machine de Turing sur l'alphabet $\Sigma = \{B, 0, 1\}$ (B pour « blanc », le symbole présent sur la bande par défaut) dont le langage est l'ensemble des multiples de 5 (en binaire). On suppose que le nombre est écrit *normalement*, de la gauche vers la droite. La machine débute avec la tête de lecture sur le bit de poids fort (la bande est infinie à gauche et à droite). Rappel : une machine qui ne reconnaît pas un mot doit s'arrêter sur un état non terminal ... ou boucler.

Indication : parcourir le nombre de gauche à droite et utiliser les propriétés suivantes ($x \equiv y[z]$ signifie « x est égal à y modulo z ») pour fabriquer une machine à 5 états principaux (plus éventuellement un état initial et/ou un état terminal) :

$$\begin{aligned} n \equiv 0[5] &\Rightarrow 2n \equiv 0[5] \text{ et } 2n + 1 \equiv 1[5] \\ n \equiv 1[5] &\Rightarrow 2n \equiv 2[5] \text{ et } 2n + 1 \equiv 3[5] \\ n \equiv 2[5] &\Rightarrow 2n \equiv 4[5] \text{ et } 2n + 1 \equiv 0[5] \\ &\dots \end{aligned}$$

Décidabilité

1. La propriété suivante
« Soit t un λ -terme. t est normalisable en moins de 42^1 étapes. »
est-t-elle décidable ? Justifier.

¹42 est la réponse « au sens de la vie, de l'univers et du reste » d'après Douglas Adams dans *The Hitchhiker's Guide to the Galaxy*.